

PEMODELAN PERSAMAAN GERAK UNTUK OSILASI-OSILASI AEROELASTIK DARI OSILATOR DOUBLE SEESAW DI BAWAH KONDISI UDARA KUAT

Happy Lumbantobing

e-mail:happytobing2003@yahoo.com

Program Studi Pendidikan Matematika

Jurusan PMIPA, FKIP, Universitas Cenderawasih.

Abstrak

Artikel ini mengulas model persamaan gerak untuk osilasi-osilasi aeroelastik dari osilator double seesaw di bawah kondisi udara kuat. Dalam pemodelan persamaan gerak untuk osilator double seesaw digunakan formulasi Lagrange, sedangkan dalam pemodelan gaya-gaya aeroelastik yang bekerja pada silinder dari osilator tersebut digunakan pendekatan quasi-steady. Pendekatan tersebut merupakan suatu pendekatan yang mengasumsikan bahwa setiap gaya fluida yang terjadi sesaat ditentukan seutuhnya oleh aliran sesaat yang dialami oleh silinder tersebut. Selanjutnya, dalam menganalisa persamaan geraknya, dilakukan beberapa kali proses dilatasi, scaling dan transformasi sehingga diperoleh suatu sistem persamaan differensial biasa order dua yang tak linier. Dengan mengasumsikan kondisi udara kuat, yaitu mengasumsikan bahwa $\epsilon\mu^2 = O(1)$ maka didapat persamaan yang jauh lebih kompleks. Model persamaan tersebut dapat dipandang sebagai suatu model dari osilasi-osilasi (vibrasi-vibrasi atau getaran-getaran) dari struktur dengan dua derajat kebebasan.

Kata kunci: osilasi aeroelastik, osilator seesaw, formulasi lagrange, pendekatan quasy steady, kondisi udara kuat

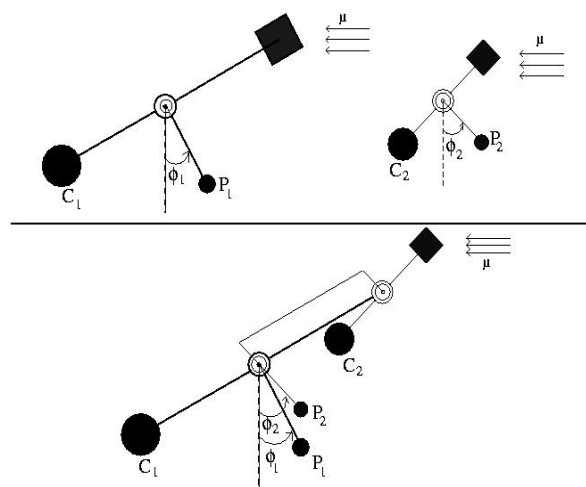
1. Latar Belakang

Osilasi-osilasi aeroelastik dari struktur-struktur sangat sering terjadi dalam kehidupan sehari-hari, mulai dari jenis struktur dengan teknologi yang paling sederhana sampai struktur dengan menggunakan teknologi yang sangat canggih bisa mengalami osilasi aeroelastik jika diterpa oleh aliran udara. Osilasi-osilasi aeroelastik dari osilator aeroelastik telah banyak ditinjau para ahli seperti osilator bandul, osilator seesaw yang ditempat pada aliran udara yang homogen. Sifat-sifat dari osilasi yang terjadi dari osilator tersebut diharapkan dapat diterapkan pada osilasi-osilasi dari struktur pada kehidupan nyata. Beberapa ahli telah meninjau osilasi aeroelastik dari beberapa osilator seperti, Parkinson & Smith (1964) telah memodelkan dan menganalisa galloping dari osilator plunge untuk suatu prisma bujur sangkar. Van der Burgh, Haaker dan van Oudheusden (1995), Haaker dan van der Burgh (1994) serta Lumbantobing dan Haaker (2002) telah memodelkan dan menganalisa galloping dari osilator-osilator bertipe seesaw. Para pengarang tersebut menerapkan pendekatan quasi steady untuk memodelkan gaya-gaya aeroelastik yang bekerja pada silinder dari osilator tersebut. Gaya-gaya aeroelastik diasumsikan kecil untuk kecepatan udara yang kecil. Dengan demikian metode asimptotik dapat digunakan untuk menganalisa persamaan geraknya, lihat Verhulst (1996) dan Tondl, *et al.* (2000). Pada

Lumbantobing dan Haaker (2002), ditinjau osilasi-osilasi aeroelastik dari osilator single seesaw dengan kondisi udara kuat. Pada Van der Burgh, Haaker, dan van Oudheusden (1995) telah ditinjau osilasi-osilasi aeroelastik dari osilator double seesaw dengan kecepatan udara lemah. Mereka memodelkan persamaan geraknya dengan asumsi bahwa silindernya mempunyai sayatan yang simetris. Mereka melakukan eksperimen dengan resonansi 1:1. Hasil yang mereka dapat lebih terfokus pada hasil eksperimen untuk kecepatan udara tertentu dan tidak menganalisa model persamaan secara umum. Pada paper ini akan ditinjau model persamaan gerak untuk osilasi-osilasi aeroelastik dari osilator double seesaw yang merupakan pengembangan dari osilator single seesaw di bawah kondisi udara kuat. Dengan demikian hasil dari penelitian ini akan lebih realistis dengan kenyataan pada kehidupan sehari-hari.

2. Tinjauan Pustaka

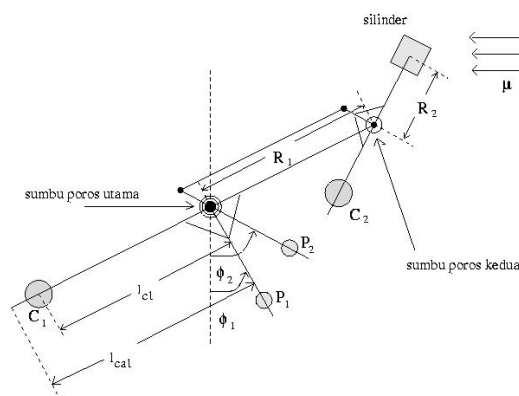
Osilator double seesaw merupakan suatu osilator aeroelastik dengan dua derajat kebebasan yang ditempatkan dalam aliran udara yang homogen dan uniform. Osilator tersebut merupakan pengembangan dari osilator single seesaw, lihat skematik pengkonstruksian osilator tersebut pada Gambar 1. Pada osilator double seesaw, silinder pada single seesaw yang pertama (single seesaw utama) digantikan dengan sumbu utama untuk osilator single seesaw yang kedua (selanjutnya disebut sumbu poros kedua). Jadi single seesaw yang kedua ditempatkan melalui sumbu poros kedua yang menggantikan silinder dari seesaw utama. Sementara bandul dari seesaw kedua ditempatkan (digantungkan) pada sumbu poros utama dan dihubungkan dengan seesaw kedua melalui suatu batang yang paralel dengan lengan seesaw utama.



Gambar 1. Skematik pengkonstruksian osilator double seesaw dari dua buah osilator seesaw. Gambar atas: Skematik dari dua buah osilator single seesaw. Gambar bawah: Skematik osilator double seesaw.

Persamaan gerak osilator tersebut dimodelkan dengan menggunakan formulasi Lagrange dan pendekatan quasi steady. Gaya udara unsteady pada struktur yang sedang bergerak diasumsikan sama dengan gaya steady pada struktur stasionary pada aliran udara yang steady dengan kecepatan udara sesaat. Gaya aeroelatik yang bekerja pada osilator tersebut dimodelkan dengan menggunakan pendekatan quasi steady, lihat Blevins (1990). Sementara model persamaan geraknya dimodelkan dengan formulasi Lagrange, lihat Goldstein (1980).

Dalam pemodelan persamaan geraknya, digunakan skematik struktur osilator double seesaw seperti pada Gambar 2.



Gambar 2. Skematik dari osilator double seesaw.

Pada Gambar 2 diberikan skematik dari struktur osilator double seesaw. Keterangan dari gambar osilator tersebut diberikan pada Tabel 1

Tabel 1

Keterangan dari struktur osilator double seesaw yang tertera pada Gambar 2.

Keterangan Gambar 2	
C_1	Beban penyeimbang seesaw pertama
C_2	Beban penyeimbang seesaw kedua
P_1	Massa bandul pada seesaw pertama
P_2	Massa bandul pada seesaw kedua
R_1	Panjang lengan seesaw pertama
R_2	Panjang lengan seesaw kedua
ϕ_1	Besar sudut rotasi sekitar sumbu poros utama
ϕ_2	Besar sudut rotasi sekitar sumbu poros kedua
μ	Kecepatan udara
l_{c1}	Jarak massa beban penyeimbang pertama dengan sumbu poros
l_{cal}	Panjang lengan massa penyeimbang pertama

Osilator double seesaw adalah merupakan pengembangan dari osilator single seesaw, dimana silinder pada single seesaw utama digantikan oleh seesaw kedua dengan sumbu poros seesaw yang kedua berimpit dengan titik pusat silinder pada seesaw utama. Sifat-sifat dari osilator single seesaw di bawah kondisi udara kuat telah dibahas oleh Lumbantobing dan Haaker, lihat Lumbantobing dan Haaker (2000, 2002).

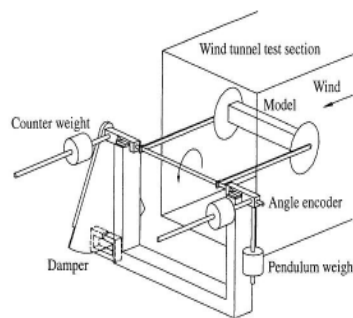
Dengan adanya struktur seesaw yang kedua maka sifat-sifat osilasi-osilasi aeroelastik dari osilator tersebut akan berubah secara radikal. Hal ini terjadi karena adanya sub sistem yang baru, yaitu struktur seesaw kedua yang mempengaruhi sifat-sifat osilasi-osilasi aeroelastik dari sistem utama.

Pada paper ini akan ditinjau galloping dari osilator aeroelastik dengan dua derajat kebebasan, yaitu osilator double seesaw yang ditempatkan pada suatu aliran udara yang homogen dan uniform di bawah kondisi udara kuat. Galloping adalah vibrasi-vibrasi atau osilasi-osilasi

yang bereksitasi sendiri dengan frekuensi rendah yang disebabkan oleh gaya-gaya aeroelastik yang tak mantap (unsteady aeroelastatic forces), lihat Haaker and van der Burgh (1997).

Osilator double seesaw merupakan suatu osilator aeroelastik yang merupakan pengembangan dari model osilator single seesaw, lihat Gambar 1.

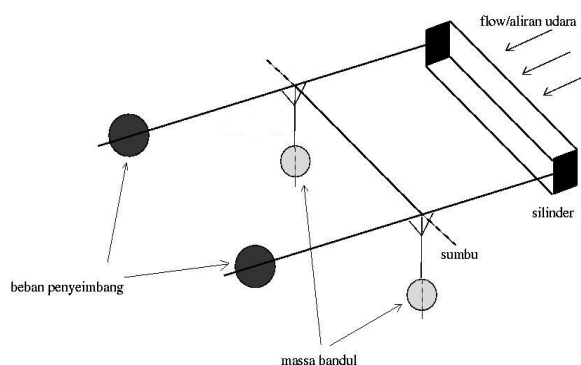
Osilator single seesaw adalah merupakan suatu struktur yang terdiri dari sepasang batang kaku yang pada salah satu ujungnya dipasang suatu silinder, sementara pada ujung yang lain dipasang suatu beban penyeimbang yang membuat silinder tersebut seimbang terhadap sumbu utama, lihat Gambar 3 dan Gambar 4.



Gambar 3. Skematik dari osilator single seesaw dalam terowongan udara.

Sumber: Van der Burgh, A. H. P., Haaker, T. I. and van Oudheusden, B. W., (1995)

Pada pemodelan persamaan gerak osilator single seesaw tersebut, skematik pada Gambar 3 disederhanakan seperti pada Gambar 4 dan selanjutnya bisa disederhanakan lagi seperti skematika single seesaw pada Gambar 1.



Gambar 4. Skematik dari osilator single seesaw

Pada osilator double seesaw, silinder pada osilator single seesaw yang pertama (single seesaw utama) digantikan dengan sumbu utama untuk osilator single seesaw yang kedua

(selanjutnya disebut sumbu poros kedua). Jadi single seesaw yang kedua ditempatkan melalui sumbu poros kedua yang menggantikan silinder dari seesaw utama. Sementara bandul dari seesaw kedua ditempatkan (digantungkan) pada sumbu poros utama dan dihubungkan dengan seesaw kedua melalui suatu batang yang paralel dengan lengan seesaw utama, lihat Gambar 2. Jika osilator tersebut mempunyai sayatan (cross section) yang tidak bundar (non-circular) dan ditempatkan pada aliran udara yang homogen maka osilasi yang bereksitasi sendiri yang disebut galloping mungkin terjadi, lihat Blevins (1990).

Beberapa pengarang dan peneliti telah mempelajari galloping untuk struktur-struktur dengan satu atau dua derajat kebebasan, seperti Parkinson & Smith (1964) telah memodelkan dan menganalisa galloping dari osilator plunge untuk suatu prisma bujur sangkar. Hasil mereka memberi inspirasi untuk penelitian-penelitian yang berhubungan dengan galloping. Terjadinya dua limit cycle, satu yang stabil dan yang kedua tidak stabil, yang merupakan fenomena yang cukup menarik ditelaah. Mereka juga menunjukkan adanya fenomena hysteresis pada sifat-sifat galloping osilator tersebut.

Haaker dan van der Burgh (1994) telah memodelkan dan menganalisa galloping dari osilator-osilator bertipe seesaw. Para peneliti tersebut menerapkan pendekatan quasi steady untuk memodelkan gaya-gaya aeroelastik yang bekerja pada silinder dari osilator tersebut. Gaya-gaya aeroelastik diasumsikan kecil untuk kecepatan udara yang kecil sehingga mereka mendapatkan persamaan gerak dalam persamaan differensial biasa yang tak linier lemah. Dengan demikian metode asimptotik dapat digunakan untuk menganalisis persamaan geraknya, lihat Verhulst (1996) dan Tondl, *et al.* (2000). Khususnya seseorang mendapatkan suatu kecepatan udara kritis yaitu suatu kecepatan udara tertentu dimana posisi ekuilibrium menjadi tak stabil dan muncul suatu osilasi-osilasi galloping yang stabil jika kecepatan udara melebihi kecepatan kritis tersebut. Sementara untuk kasus galloping dengan kondisi udara kuat, didapat sistem persamaan gerak yang tak linier kuat. Sifat-sifat osilasi-osilasi aeroelastiknya dianalisis dengan menganalisis fungsi-fungsi Melnikov dari sistem tersebut, lihat Lumbantobing dan Haaker (2000, 2002). Mereka memperlihatkan bahwa adanya kemungkinan terdapat dua limit cycle, yaitu limit cycle yang pertama adalah stabil dan yang kedua adalah tak stabil.

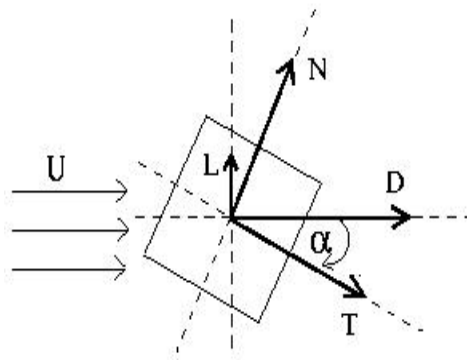
Van der Burgh, Haaker, dan van Oudheusden (1995) telah meninjau osilasi-osilasi aeroelastik dari osilator double seesaw. Mereka memodelkan persamaan geraknya dengan asumsi bahwa silindernya mempunyai sayatan yang simetris. Mereka melakukan eksperimen dengan

resonansi 1:1. Hasil yang mereka dapat lebih terfokus pada hasil eksperimen untuk kecepatan udara tertentu dan tidak menganalisa model persamaan secara umum. Kemudian van Oudheusden (1996) telah melakukan eksperimen di terowongan udara untuk model osilator double seesaw dengan silinder yang mempunyai sayatan yang semitris. Dia meneliti sifat-sifat galloping dari osilator tersebut dengan rasio frekuensi yang cukup dekat dengan satu. Dia hanya memaparkan hasil eksperimen dengan menentukan nilai-nilai tertentu untuk parameter-parameter yang ada dan untuk kecepatan udara tertentu, tanpa mengenalisa lebih jauh sistem persamaan geraknya.

Luongo dan Piccardo (1998) telah meninjau galloping tak linier dari kabel-kabel yang diselimuti oleh es dengan resonansi 2:1. Mereka memodelkan persamaan geraknya dalam persamaan differensial biasa order dua. Mereka menunjukkan percabangan solusi tak trivial yang stabil setelah melebihi kecepatan udara kritis.

3. Pemodelan Quasi – Steady untuk Gaya Gaya Udara yang Bekerja Pada Silinder.

Pada bagian ini akan ditinjau gaya-gaya udara yang bekerja pada silinder yang mempunyai sayatan uniform dengan aliran udara yang uniform dan homogen. Arah aliran udara adalah tegak lurus terhadap sumbu silinder. Kita akan meninjau dua situasi di sini, yaitu pertama adalah gaya-gaya udara yang bekerja pada silinder dalam keadaan statis dan yang kedua adalah gaya-gaya udara yang bekerja pada silinder dalam keadaan bergerak. Untuk silinder yang dalam keadaan statis (diam) kita mengasumsikan bahwa gaya-gaya udara yang bekerja seluruhnya ditentukan oleh kecepatan udara yang uniform (seragam) dan orientasi (posisi) silinder ke arah aliran udara. Orientasi atau sudut attack dapat didefinisikan sebagai sudut α , yaitu sudut antara arah aliran udara dan perubahan posisi silinder dari posisi tetap terhadap sumbunya. Sudut tersebut diukur positif jika searah dengan putaran jarum jam. Perhatikan gambar berikut:



Gambar 5. Gaya-gaya aerodinamik yang bekerja pada silinder posisi diam.

Pada Gambar 5 diberikan pemodelan gaya-gaya aerodinamik dari gaya-gaya udara yang bekerja pada silinder dengan sayatan berbentuk bujursangkar. Jika silinder tersebut ditempatkan dalam aliran udara yang seragam dan homogen dengan kecepatan udara U dan sudut attack α , maka gaya-gaya udara yang bekerja pada silinder tersebut dapat dikomposisikan dalam gaya tarik dan gaya angkat (*drag and lift forces*) atau dalam gaya normal dan gaya tangensial, lihat Gambar 5. Gaya tarik D dan gaya angkat L adalah secara berturut-turut menyatakan gaya yang searah dengan arah aliran udara dan gaya yang tegak lurus dengan arah aliran udara tersebut. Perlu diperhatikan bahwa gaya angkat L akan bernilai positif jika arah gaya tersebut vertikal ke atas. Gaya tangensial T dan gaya normal N adalah secara berturut-turut menyatakan gaya yang searah dengan sumbu simetri silinder dan gaya yang tegak lurus dengan sumbu tersebut, sedemikian sehingga $L = N$ dan $D = T$ jika $\alpha = 0$.

Pada paper Haaker (1994) telah dianalisa dan dimodelkan gaya-gaya aerodinamik yang bekerja pada osilator sistem silinder pegas. Pada paper tersebut telah dimodelkan gaya tarik dan gaya angkat sebagai berikut:

$$D = \frac{1}{2} \rho d l U_r^2 C_D(\alpha) \dots\dots\dots(1)$$

$$L = \frac{1}{2} \rho d l U_r^2 C_L(\alpha), \dots\dots\dots(2)$$

dimana ρ adalah kerapatan udara, d adalah diameter dari sayatan silinder, l adalah panjang silinder, U_r adalah kecepatan udara, C_D adalah koefisien aerodinamik yang bersesuaian dengan gaya tarik D sebagai fungsi dari α , dan C_L adalah koefisien aerodinamik yang bersesuaian dengan gaya angkat L sebagai fungsi dari α . Untuk pemodelan gaya-gaya pada silinder dalam

keadaan diam, maka diambil dekomposisi gaya-gaya tangensial dan normal, yaitu T dan N sebagai berikut:

$$T = \frac{1}{2} \rho d l U^2 C_T(\alpha), \dots \dots \dots (3)$$

$$N = \frac{1}{2} \rho d l U^2 C_N(\alpha), \dots \dots \dots (4)$$

dimana ρ adalah kerapatan udara, d adalah panjang karakteristik dari sayatan silinder, l menyatakan panjang silinder, U menyatakan kecepatan udara, fungsi-fungsi $C_T(\alpha)$ dan $C_M(\alpha)$ secara berturut-turut menyatakan koefisien aerodinamik yang bergantung pada sudut attack α .

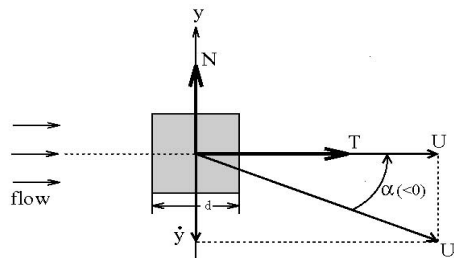
Dari Gambar 5 didapat hubungan antara gaya-gaya N , T dan L , D sebagai berikut

$$T = D \cos \alpha - L \sin \alpha, \dots \dots \dots (5)$$

$$N = D \sin \alpha + L \cos \alpha, \dots \dots \dots (6)$$

Sekarang mari kita meninjau pemodelan gaya-gaya aerodinamik pada silinder yang melakukan suatu osilasi translasional, yaitu suatu osilasi dimana kemiringan dari sumbu simetri dengan arah aliran udara tidak berubah.

Perhatikan Gambar 6 berikut ini.



Gambar 6. Pemodelan quasy-steady untuk gaya -gaya udara yang bekerja pada silinder yang melakukan gerak vertikal

Pada Gambar 6, suatu silinder dengan sayatan bujur sangkar, yang sedang melakukan osilasi-osilasi vertikal dalam aliran udara yang uniform dan horizontal. Gerak silinder yang ditinjau adalah hanya sepanjang sumbu y , yang bernilai positif jika gerak mengarah ke sumbu y positif. Untuk memodelkan gaya-gaya udara yang bekerja pada silinder, kita menggunakan pendekatan quasi-steady, yaitu dengan mengasumsikan bahwa gaya udara yang bekerja pada silinder yang sedang bergerak adalah seluruhnya ditentukan oleh sentuhan aliran udara sesaat yang dialami

oleh silinder tersebut (*instantaneous experienced wind flow*). Aliran udara sesaat mempunyai kecepatan U_r , yaitu merupakan penjumlahan vektor kecepatan udara U dan \dot{y} . Sudut attack sesaat α adalah sudut antara vektor kecepatan U_r dan arah aliran udara sepanjang sumbu simetri yang diukur positif jika searah putaran jarum jam.

Dari Gambar 6, kita mendapatkan bahwa

$$U_r = \sqrt{\dot{y}^2 + u^2} = \frac{U}{\cos \alpha}, \dots\dots\dots(7)$$

$$\alpha = \arctan \frac{-\dot{y}}{U} = -\arctan \frac{y}{U}, \dots\dots\dots(8)$$

dan

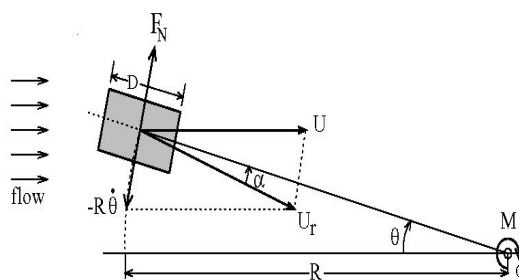
$$T = \frac{1}{2} \rho d l U_r^2 C_T(\alpha), \dots\dots\dots(9)$$

$$N = \frac{1}{2} \rho d l U_r^2 C_N(\alpha) \dots\dots\dots(10)$$

Untuk kasus silinder yang melakukan osilasi rotasional, persamaan di atas tidak berlaku, karena pada mode osilasi rotasional, setiap elemen permukaan pada sayatan silinder mempunyai kecepatan rotasional yang berbeda.

Sekarang mari kita meninjau model yang melibatkan mode-mode osilasi rotasional. Pendekatan quasi-steady adalah masih tetap dapat digunakan untuk memodelkan gaya-gaya yang bekerja pada silinder.

Perhatikan Gambar 7 di bawah ini



Gambar 7. Pemodelan quasi-steady untuk gaya-gaya aeroelastik yang bekerja pada silinder yang melakukan gerak rotasional.

Pada Gambar 7 diberikan sketsa dari sebuah sayatan silinder yang melakukan gerak rotasional. Sudut θ menyatakan sudut yang diukur dari posisi horizontal ke lengan model, yang bernilai positif dalam arah yang searah dengan putaran jarum jam.

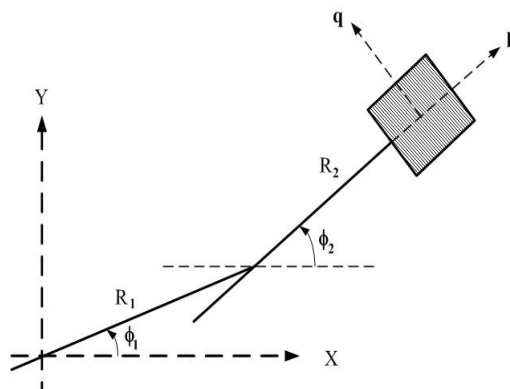
Kita mengasumsikan bahwa momen aerodinamik M di sekitar sumbu osilator ditentukan oleh gaya normal N (dalam gambar F_N), yaitu

$$M = NR, \dots\dots\dots(11)$$

$$N = \frac{1}{2} \rho d U_r C_N(\alpha), \dots\dots\dots(12)$$

$$\alpha = \theta - \arctan \frac{R\dot{\theta} \cos(\theta)}{U - R\dot{\theta} \sin(\theta)} \dots\dots\dots(13)$$

4. Pemodelan Persamaan Gerak Untuk Osilator Double Seesaw



Gambar 8. Sistem koordinat lokal untuk silinder

Pada Gambar 8 diberikan sketsa dari sistem koordinat lokal untuk silinder dari osilator double seesaw. Sekarang kita meninjau pemodelan untuk osilator double seesaw dengan menggunakan sistem koordinat (p,q) dengan titik pangkal dari sistem koordinat tersebut berimpit dengan titik pusat dari sayatan silinder. Sumbu p berimpit dengan lengan kedua (R_2) dari osilator, sementara sumbu q tegak lurus dengan sumbu p. Posisi titik-titik pada sayatan silinder pada koordinat (X,Y) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$X = R_1 \cos \Phi_1 + R_2 \cos \Phi_2 + p \cos \Phi_2 - q \sin \Phi_2, \dots\dots\dots(14)$$

$$Y = R_1 \sin \Phi_1 + R_2 \sin \Phi_2 + q \cos \Phi_2 + p \sin \Phi_2 \dots\dots\dots(15)$$

Dari persamaan-persamaan ini didapat komponen kecepatan sebagai berikut

$$\dot{X} = -R_1 \sin \Phi_1 \dot{\Phi}_1 - R_2 \sin \Phi_2 \dot{\Phi}_2 - p \sin \Phi_2 \dot{\Phi}_2 - q \cos \Phi_2 \dot{\Phi}_2, \dots\dots\dots (16)$$

$$\dot{Y} = R_1 \cos \Phi_1 \dot{\Phi}_1 + R_2 \cos \Phi_2 \dot{\Phi}_2 - q \sin \Phi_2 \dot{\Phi}_2 + p \cos \Phi_2 \dot{\Phi}_2 \dots\dots\dots (17)$$

Untuk menentukan persamaan gerak dari osilator tersebut, kita harus menentukan energi kinetik dan energi potensial dari komponen-komponen struktur osilator. Komponen-komponen dari struktur double seesaw diberikan pada Tabel 2.

Tabel 2:
 Komponen dari osilator double seesaw

	Osilator	Massa	Panjang
CYL	Silinder	m_c	D
MA ₂	Lengan model kedua	m_{ma2}	R_2
CA ₂	Lengan beban penyeimbang kedua	m_{ca2}	l_{ca2}
PA ₂	Lengan bandul kedua	m_{pa2}	l_{pa2}
C ₂	Beban penyeimbang seesaw kedua	m_{c2}	l_{c2}
P ₂	Bandul pada seesaw kedua	m_{p2}	lp_2
MA ₁	Lengan model pertama	m_{ma1}	R_1
CA ₁	Lengan beban penyeimbang pertama	m_{ca1}	l_{ca1}
PA ₁	Lengan Bandul pertama	m_{pa1}	l_{pa1}
C ₁	Beban penyeimbang seesaw pertama	m_{c1}	l_{c1}
P ₁	Bandul pada seesaw pertama	m_{p1}	lp_1

Di sini, hanya perhitungan energi kinetik pada silinder yang diberikan, sementara energi kinetik dari komponen struktur yang lain diberikan pada Tabel 3 dan energi potensial pada komponen struktur-struktur pada osilator diberikan pada Tabel 4.

Misalkan l menyatakan panjang dan ρ menyatakan konstanta kerapatan sayatan silinder maka energi kinetik E_k dari silinder adalah sebagai berikut:

$$E_k = l \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \rho (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) dp dq, \dots\dots\dots(18)$$

dimana pengintegralan dilakukan terhadap sayatan silinder Ω . Sementara massa silinder dan momen inersia di sekitar sumbunya secara berturut-turut adalah sebagai berikut:

$$m_c = l \iint_{\Omega} \rho dpdq, \text{ dan } \dots\dots\dots (19)$$

$$I_c = l \iint_{\Omega} \rho (p^2 + q^2) dpdq. \dots\dots\dots (20)$$

Sehingga kita mendapatkan energi kinetik pada silinder sebagai berikut

$$E_k = \frac{1}{2} m_c R_1^2 \dot{\Phi}_1^2 + \frac{1}{2} m_c R_2^2 \dot{\Phi}_2^2 + \dot{\Phi}_2^2 I_c + m_c R_1 R_2 \dot{\Phi}_1 \dot{\Phi}_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1) \dots\dots\dots (21)$$

Selanjutnya perhatikan kontribusi energi kinetik dan energi potensial pada table-tabel berikut ini.

Tabel 3
 Kontribusi energi kinetik pada osilator double seesaw

Komponen	Energi Kinetik
CYL	$\frac{1}{2} m_c R_1^2 \dot{\Phi}_1^2 + \frac{1}{2} m_c R_2^2 \dot{\Phi}_2^2$ $+ m_c R_1 R_2 \dot{\Phi}_1 \dot{\Phi}_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1)$ $+ \dot{\Phi}_2^2 I_c$
MA ₂	$\frac{1}{2} m_{ma2} R_1^2 \dot{\Phi}_1^2 + \frac{1}{6} m_{ma2} R_2^2 \dot{\Phi}_2^2$ $+ \frac{1}{2} m_{ma2} R_1 R_2 \dot{\Phi}_1 \dot{\Phi}_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1)$
CA ₂	$\frac{1}{2} m_{ca2} R_1^2 \dot{\Phi}_1^2 + \frac{1}{6} m_{ca2} l_{ca2}^2 \dot{\Phi}_2^2$ $- \frac{1}{2} m_{ca2} R_1 l_{ca2} \dot{\Phi}_1 \dot{\Phi}_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1)$

PA ₂	$\frac{1}{6} m_{pa2} l_{pa2}^2 \dot{\Phi}_2^2$
C ₂	$\frac{1}{2} m_{c2} R_1^2 \dot{\Phi}_1^2 + \frac{1}{2} m_{c2} l_{c2}^2 \dot{\Phi}_2^2 - m_{c2} R_1 l_{c2} \dot{\Phi}_1 \dot{\Phi}_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1)$
P ₂	$\frac{1}{2} m_{p2} l_{p2}^2 \dot{\Phi}_2^2$
MA ₁	$\frac{1}{6} m_{ma1} R_1^2 \dot{\Phi}_1^2$
CA ₁	$\frac{1}{6} m_{ca1} l_{ca1}^2 \dot{\Phi}_1^2$
PA ₁	$\frac{1}{6} m_{pa1} l_{pa1}^2 \dot{\Phi}_1^2$
C ₁	$\frac{1}{2} m_{c1} l_{c1}^2 \dot{\Phi}_1^2$
P ₁	$\frac{1}{2} m_{p1} l_{p1}^2 \dot{\Phi}_1^2$

Tabel 4

Kontribusi energi potensial pada osilator double seesaw

Komponen	Energi Potensial
CYL	$m_c g (R_1 \sin \Phi_1 + R_2 \sin \Phi_2)$
MA ₂	$m_{a2} g (R_1 \sin \Phi + \frac{1}{2} R_2 \sin \Phi_2)$
CA ₂	$m_{ca2} g (R_1 \sin \Phi - \frac{1}{2} l_{ca2} R_2 \sin \Phi_2)$
PA ₂	$-\frac{1}{2} m_{pa2} g l_{pa2} \cos \Phi_2$
C ₂	$m_{c2} g (R_1 \sin \Phi - l_{c2} R_2 \sin \Phi_2)$
P ₂	$\frac{1}{2} m_{p2} g l_{p2}^2 \cos \Phi$

MA ₁	$\frac{1}{2} M_{ma1} g R_1 \sin \Phi_1$
CA ₁	$-\frac{1}{2} m_{ca1} g l_{ca1}^2 \sin \Phi_1$
PA ₁	$-\frac{1}{2} m_{pa1} g l_{pa1} \cos \Phi_1$
C ₁	$-m_{c1} g l_{c1}^2 \sin \Phi_1$
P ₁	$-m_{p1} g l_{p1} \cos \Phi_1$

Jika kita mengasumsikan belum ada sentuhan udara pada silinder, yaitu pada posisi ekuilibrium $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ maka momen gravitasional yang berhubungan dengan massa dari bagian-bagian struktur osilator pada bagian sebelah kiri dari sumbu utama adalah seimbang dengan momen gravitasional yang berhubungan dengan massa dari bagian-bagian struktur osilator pada bagian sebelah kanan. Sehingga didapat bahwa

$$m_c R_2 + \frac{1}{2} m_{ma2} R_2 - m_{c2} l_{c2} - \frac{1}{2} m_{ca2} l_{ca2} = 0 \dots \dots \dots (22)$$

Sementara untuk momen di sekitar sumbu kedua adalah sebagai berikut

$$m_c (R_1 + R_2) + m_{ma2} \left(R_1 + \frac{1}{2} R_2 \right) + m_{ca2} \left(R_1 - \frac{1}{2} l_{ca2} \right) + m_{c2} (R_1 - l_{c2}) + \frac{1}{2} m_{ma1} R_1 - \frac{1}{2} m_{ca1} l_{ca1} - m_{c1} l_{c1} = 0, \dots \dots \dots (23)$$

Energi kinetik total didapat dengan menjumlahkan semua energi kinetik seperti yang tertera pada Tabel 3. Sementara energi potensial didapat dengan menjumlahkan energi-energi potensial yang tertera pada Tabel 4.

Sekarang mari kita menghitung momen inersia dari seesaw utama dan seesaw kedua. Setelah melakukan perhitungan, momen untuk seesaw utama dan seesaw kedua secara berturut-turut dinyatakan oleh

$$I_1 = \left(m_{ma2} + m_c + \frac{1}{3} m_{ma1} + m_{ca2} + m_c \right) R_1^2 + \frac{1}{3} m_{ca1} l_{ca1}^2 + \frac{1}{3} m_{pa1} l_{pa1}^2 + m_{c1} l_{c1}^2 + m_{p1} l_{p1}^2, \dots \dots \dots (24)$$

dan

$$I_1 = \left(m_c + \frac{1}{3} m_{ma2} \right) R_2^2 + \frac{1}{3} m_{pa2} l_{pa2}^2 + 2I_2 + \frac{1}{3} m_{ca2} l_{ca2}^2 + m_{p2} l_{p2}^2 + m_{c2} l_{c2}^2 \dots \dots \dots (25)$$

Selanjutnya kita menghitung koefisien-koefisien gaya-gaya pemulih linier yang berhubungan dari bandul, dan secara berturut-turut diperoleh

$$k_1 = m_{p1}gl_{p1} + \frac{1}{2}m_{pa1}gl_{pa1}, \text{ dan } \dots\dots\dots(26)$$

$$k_2 = m_{p2}gl_{p2} + \frac{1}{2}m_{pa2}gl_{pa2} \cdot \dots\dots\dots (27)$$

Energi kinetik E_k dan energi potensial E_p dari struktur osilator adalah sebagai berikut

$$E_k = \frac{1}{2}(I_1\dot{\Phi}_1^2 + I_2\dot{\Phi}_2^2) \text{ dan } \dots\dots\dots(28)$$

$$E_p = -(k_1 \cos \Phi_1 + k_2 \cos \Phi_2) \cdot \dots\dots\dots(29)$$

Kita mengaproksmasi $\cos \Phi \approx 1 - \frac{1}{2}\Phi^2$, maka didapat formulasi Lagrange sebagai berikut:

$$L = E_k - E_p = \frac{1}{2}[I_1\dot{\Phi}_1^2 + I_2\dot{\Phi}_2^2] - \frac{1}{2}[k_1\Phi_1^2 + k_2\Phi_2^2] + (k_1k_2) \dots\dots\dots(30)$$

Selanjutnya didapat bahwa

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_1} = -k_1\Phi_1, \dots\dots\dots(31)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_2} = -k_2\Phi_2, \dots\dots\dots(32)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}_1} = I_1\dot{\Phi}_1, \dots\dots\dots(33)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}_2} = I_2\dot{\Phi}_2, \dots\dots\dots(34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}_1} = I_1\ddot{\Phi}_1, \dots\dots\dots(35)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}_2} = I_2\ddot{\Phi}_2 \cdot \dots\dots\dots(36)$$

Persamaan untuk formulasi Lagrange adalah sebagai berikut

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \Phi_1} = I_1\ddot{\Phi}_1 + k_1\Phi_1 \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \Phi_2} = I_2\ddot{\Phi}_2 + k_2\Phi_2 \end{cases} \dots\dots\dots(37)$$

Sehingga kita mendapatkan persamaan gerak dari osilator seesaw tanpa adanya perturbasi dan tanpa adanya damping sebagai berikut

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\Phi}_1 + k_1 \Phi_1 = 0, \\ I_2 \ddot{\Phi}_2 + k_2 \Phi_2 = 0. \end{cases} \dots\dots\dots(38)$$

Sementara persamaan gerak dengan adanya gaya damping adalah sebagai berikut

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\Phi}_1 + k_1 \Phi_1 = -c_1 \dot{\Phi}_1 + c_2 (\dot{\Phi}_2 - \dot{\Phi}_1) \\ I_2 \ddot{\Phi}_2 + k_2 \Phi_2 = -c_2 (\dot{\Phi}_2 - \dot{\Phi}_1) \end{cases} \dots\dots\dots(39)$$

Setelah mengasumsikan bahwa adanya momen yang disebabkan oleh aliran udara maka diperoleh persamaan berikut

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\Phi}_1 + k_1 \Phi_1 = M_{\Phi_1} - c_1 \dot{\Phi}_1 + c_2 (\dot{\Phi}_2 - \dot{\Phi}_1), \\ I_2 \ddot{\Phi}_2 + k_2 \Phi_2 = M_{\Phi_2} - c_2 (\dot{\Phi}_2 - \dot{\Phi}_1), \end{cases} \dots\dots\dots(40)$$

dimana M_{Φ_1} dan M_{Φ_2} menyatakan momen yang disebabkan oleh aliran udara pada seesaw utama dan seesaw kedua, dengan

$$M_{\Phi_1} = NR_1 \cos(\Phi_2 - \Phi_1) - TR_1 \sin(\Phi_2 - \Phi_1) \approx NR_1 - TR_1 (\Phi_2 - \Phi_1) \dots\dots\dots(41)$$

$$M_{\Phi_2} = NR_2, \text{ dengan } \dots\dots\dots(42)$$

$$N = \frac{1}{2} \rho dl U^2 C_N(\alpha) \text{ dan } T = \frac{1}{2} \rho dl U^2 C_T(\alpha). \dots\dots\dots(43)$$

Dengan demikian kita mendapatkan persamaan berikut

$$I_1 \ddot{\Phi}_1 + k_1 \Phi_1 = \frac{1}{2} \rho dl R_1 U^2 (C_N(\alpha) - C_T(\alpha)) (\Phi_2 - \Phi_1) - c_1 \dot{\Phi}_1 + c_2 (\dot{\Phi}_2 - \dot{\Phi}_1), \dots\dots\dots(44)$$

$$I_2 \ddot{\Phi}_2 + k_2 \Phi_2 = \frac{1}{2} \rho dl R_2 U^2 C_N(\alpha) + c_1 \dot{\Phi}_1 \dot{\Phi}_2.$$

Selanjutnya kita memilih

$$\begin{cases} C_N(\alpha) = c_1 \alpha + c_3 \alpha^3 \\ C_T(\alpha) = d_0 + d_2 \alpha^2 \end{cases}$$

dan

$$\alpha = \Phi_2 - \frac{R_1 \Phi_1 + R_2 \Phi_2}{u}, \dots\dots\dots(45)$$

dengan .

$c_1 < 0$, $c_3 > 0$, $d_0 > 0$ dan d_2 adalah nilai sembarang.

Setelah mendilatasikan $\Phi_i \rightarrow \tilde{\Phi}_i$, dengan $\tilde{\Phi}_i = \sqrt{c_3} \Phi_i; i = 1, 2$ maka diperoleh

$$I_1 \ddot{\Phi}_1 + k_1 \Phi_1 = \frac{1}{2} \rho dl R_1 U^2 (C_N(\alpha) - C_T(\alpha)) (\Phi_2 - \Phi_1) - c_1 \dot{\Phi}_1 + c_2 (\dot{\Phi}_2 - \dot{\Phi}_1) \dots\dots\dots(46)$$

$$I_2 \ddot{\Phi}_2 + k_2 \Phi_2 = \frac{1}{2} \rho dl R_2 U^2 C_N(\alpha) + c_1 \dot{\Phi}_1 - \dot{\Phi}_2.$$

dengan

$$\begin{cases} \tilde{C}_N(\alpha) = c_1 \alpha + c_3 \\ \tilde{C}_T(\alpha) = d_0 + \lambda \alpha^2 \end{cases}$$

dan

$$\alpha = \Phi_2 - \frac{R_1 \dot{\Phi}_1 - R_2 \dot{\Phi}_2}{u}, \lambda = \frac{d_2}{c_3}, \dots\dots\dots(47)$$

Misalkan $\Omega_1^2 = \frac{k}{I_1}$ dan $\Omega_2^2 = \frac{k_2}{I_2}$ maka didapat persamaan berikut

$$\begin{cases} \ddot{\Phi}_1 + \Omega_1^2 \Phi_1 = \frac{1}{2I_1} \rho dl R_1 U^2 \\ \quad - (\tilde{C}_N(\alpha) - \tilde{C}_T(\alpha)) (\Phi_2 - \Phi_1) \\ \quad - c_1 \dot{\Phi}_1 + c_2 (\dot{\Phi}_2 - \dot{\Phi}_1), \dots\dots\dots(48) \\ \ddot{\Phi}_2 + \Omega_2^2 \Phi_2 = \frac{1}{I_2} \rho dl R_2 U^2 \tilde{C}_N(\alpha) \\ \quad c_1 \dot{\Phi}_1 - c_2 \dot{\Phi}_2 \end{cases}$$

Setelah mendilatasi $t \rightarrow s$ dengan $\tau = \Omega_1 t$ dan setelah mentransformasikan $\Phi_i \rightarrow \tilde{\Phi}_i, i = 1, 2$

dengan $\tilde{\Phi}_i = \sqrt{c_3} \Phi_i$, kemudian dengan memisalkan

$$\varepsilon = \frac{1}{2I_1} \rho dl R_1^3; 2\beta_{\Phi_1} = \frac{c_1}{\Omega_1 I_1 \varepsilon};$$

$$2\beta_{\Phi_2} = \frac{c_2}{\Omega_1 I_1 \varepsilon}; \mu = \frac{U}{\Omega_1 R_1}; \eta_1 = \frac{R_2}{R_1}; \eta_2 = \frac{I_2}{I_1};$$

dan $\Omega = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ maka diperoleh persamaan berikut

$$\begin{cases} \ddot{\Phi}_1 + \Phi_1 = \varepsilon \{-2\beta_{\Phi_1} + 2\eta_2 \beta_{\Phi_2} (\dot{\Phi}_2 - \dot{\Phi}_1) \\ \quad + \mu^2 \tilde{C}_N(\alpha) \\ \quad - \mu^2 \tilde{C}_T(\alpha) (\Phi_2 - \Phi_1)\} \\ \ddot{\Phi}_2 + \Omega^2 \Phi_2 = \varepsilon \{2\beta_{\Phi_2} (\dot{\Phi}_2 - \dot{\Phi}_1) \\ \quad + \mu^2 \frac{\eta_1}{\eta_2} \tilde{C}_N(\alpha)\} \dots\dots\dots(49) \end{cases}$$

dan $\alpha = \Phi_2 - \frac{1}{\mu}(\dot{\Phi}_1 + \eta_1 \dot{\Phi}_2)$.

Asumsi untuk kondisi udara kuat diadopsi dari hasil penelitian Lumbantobing dan Haaker (2000, 2002).

Jika kita menerapkan kondisi udara kuat dengan mengasumsikan $\varepsilon\mu^2 = O(1)$ maka semua suku yang mengandung $\varepsilon\mu^2$ akan menjadi order satu ($O(1)$). Sehingga sistem persamaan gerak di atas akan menjadi sangat kompleks, yaitu suatu sistem persamaan tak linier kuat. Dengan demikian kita mendapatkan

$$\begin{aligned} \mu^2 C_N(\alpha) &= c_1 \mu^2 \alpha + \text{suku tak linier} \\ &= c_1 \mu^2 \Phi_2 - c_1 \mu (\dot{\Phi}_1 + \eta_1 \dot{\Phi}_2) \\ &\quad + \text{suku tak linier} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu^2 (\Phi_1 - \Phi_2) C_T(\alpha) &= d_0 \mu^2 (\Phi_1 - \Phi_2) \\ &\quad + \text{suku tak linier} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu^2 \frac{\eta_1}{\eta_2} C_N(\alpha) &= c_1 \frac{\eta_1}{\eta_2} \mu^2 \alpha + \text{suku tak linier} \\ &= c_1 \frac{\eta_1}{\eta_2} \mu^2 \Phi_1 - c_1 \mu (\dot{\Phi}_1 + \eta_1 \dot{\Phi}_2) + \text{suku tak linier.} \end{aligned}$$

Jadi sistem persamaan gerak (49) menjadi:

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi}_1 + \Phi_1 &= \varepsilon \{-2\beta_1 \dot{\Phi}_1 + 2\eta_2 \beta_2 (\Phi_2 - \Phi_1) + c_1 \mu^2 \Phi_2 - c_1 (\dot{\Phi}_1 + \eta_1 \dot{\Phi}_2) \\ &\quad + d_0 \mu^2 (\Phi_1 - \Phi_2)\} + \text{suku tak linier} \dots\dots\dots(50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi}_2 + \Omega_2^2 \Phi_2 &= \varepsilon \{2\beta_2 (\dot{\Phi}_2 - \dot{\Phi}_1) + c_1 \frac{\eta_1}{\eta_2} \mu^2 \Phi_1 - c_1 \mu (\dot{\Phi}_1 + \eta_1 \dot{\Phi}_2) \\ &\quad + \text{suku tak linier} \dots\dots\dots(51) \end{aligned}$$

Jika kita hanya mengambil suku-suku yang linier saja dengan mengasumsikan bahwa $\varepsilon\mu^2 = O(1)$, maka didapat persamaan gerak untuk osilasi-osilasi aeroelastik dari osilator double seesaw di bawah kondisi udara kuat sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi}_1 + (1 - d_0 \varepsilon \mu^2) \Phi_1 + \varepsilon (d_0 - c_1) \mu^2 \Phi_2 &= \varepsilon \{-2\beta_1 \dot{\Phi}_1 + 2\eta_2 \beta_2 (\Phi_2 - \Phi_1) \\ &\quad - c_1 \mu \dot{\Phi}_1 + \eta_1 \dot{\Phi}_2\} \dots\dots\dots(52) \end{aligned}$$

$$\ddot{\Phi}_2 + \Omega_2^2 \Phi_2 - \varepsilon c_1 \frac{\eta_1}{\eta_2} \mu^2 \Phi_1 = \varepsilon \{-2\beta_2 (\dot{\Phi}_2 - \dot{\Phi}_1) - c_1 \mu (\dot{\Phi}_1 + \eta_1 \dot{\Phi}_2)\} \dots\dots\dots(53)$$

5. Simpulan

Osilasi-osilasi aeroelastik dari osilator double seesaw di bawah kondisi udara kuat telah ditinjau pada penelitian. Jika silinder dari osilator tersebut ditempatkan pada aliran udara maka akan terjadi interaksi antara struktur dari osilator tersebut dengan udara yang menyentuhnya, yang disebut osilasi-osilasi aeroelastik dari osilator double seesaw.

Dari hasil pemodelan persamaan gerak dari osilator tersebut didapat persamaan gerak sebagai berikut

$$\ddot{\Phi}_1 + \Phi_1 = \varepsilon \{-2\beta_{\Phi_1} + 2\eta_2\beta_{\Phi_2} (\dot{\Phi}_2 - \dot{\Phi}_1) + \mu^2 \tilde{C}_N(\alpha) - \mu^2 \tilde{C}_T(\alpha)(\Phi_2 - \Phi_1)\}$$

$$\ddot{\Phi}_2 + \Omega_2^2\Phi_2 = \varepsilon \{2\beta_{\Phi_2} (\dot{\Phi}_2 - \dot{\Phi}_1) + \mu^2 \frac{\eta_1}{\eta_2} \tilde{C}_N(\alpha)\}$$

dengan

$$\begin{cases} \tilde{C}_N(\alpha) = c_1\alpha + c_3 \\ \tilde{C}_T(\alpha) = d_0 + \lambda\alpha^2 \end{cases}$$

dan

$$\alpha = \Phi_2 - \frac{R_1\dot{\Phi}_1 - R_2\dot{\Phi}_2}{u}$$

Setelah menerapkan kondisi udara kuat dengan mengasumsikan bahwa $\varepsilon\mu^2 = O(1)$, maka didapat persamaan berikut

$$\ddot{\Phi}_1 + (1 - d_0\varepsilon\mu^2)\Phi_1 + \varepsilon(d_0 - c_1)\mu^2\Phi_2 = \varepsilon \{-2\beta_1\dot{\Phi}_1 + 2\eta_2\beta_2 (\Phi_2 - \Phi_1) - c_1\mu \dot{\Phi}_1 + \eta_1\dot{\Phi}_2\} \dots \dots \dots (52)$$

$$\ddot{\Phi}_2 + \Omega_2^2\Phi_2 - \varepsilon c_1 \frac{\eta_1}{\eta_2} \mu^2\Phi_1 = \varepsilon \{-2\beta_2 (\dot{\Phi}_2 - \dot{\Phi}_1) - c_1 \mu (\dot{\Phi}_1 + \eta_1\dot{\Phi}_2)\} \dots \dots \dots (53)$$

Daftar Pustaka

Blevins, R. D. (1990). *Flow induced vibrations (second edition)*, Van Nostrand Reinhold, New York.

Goldstein, H. (1980). *Classical mechanics (second edition)*. Addison-Wesley publishing company, Inc.

Haaker, T. I. and van der Burgh, A. H. P., (1994). *On the dynamics of aeroelastic oscillators with one degree of freedom*. SIAM Journal on Applied Mathematics Vol. 54, No. 4, pp. 1033 – 1047.

- Haaker, T.I., and van der Burgh, A. H. P., (1997). *Nonlinear rotational galloping of couple oscillator.*, Proceedings of the 2nd european & african conference on wind engineering, Genova-Italy, Vol. 2, pp. 1735-1742.
- Luongo, A. and Piccardo, G., (1998). *Non-Linear galloping of iced suspended cables with two-to-one internal resonance.* Journal of sound and vibrations, Vol 214, No. 5, pp. 915-940.
- Lumbantobing, H. and Haaker, T.I., (2000). *Aeroelastic oscillations of a single seesaw oscillator under strong wind conditions.* Journal of Indonesian Mathematical Society, Vol 6, No. 5, pp. 439 – 444.
- Lumbantobing, H. and Haaker, T.I., (2002). *Aeroelastic oscillations of a seesaw-type oscillator under strong wind conditions.* Journal of Sound and Vibrations, Vol 257, Issue 3, pp. 439 – 456.
- Parkinson, G.V. and Smith, J.D. (1964), *The square prism as an aeroelastic non-linear oscillator.* Quart. J. Mech. and Appl. Math, vol. 26, Pt. 2, pp. 225-239.
- Tondl, A., Ruijgrok, T., Verhulst, F. & Nabergoj, R. (2000). *Autoparametric resonance in mechanical system*, Cambridge University press, USA
- Van der Burgh, A. H. P., Haaker, T. I. and van Oudheusden, B. W. (1995). *A new aeroelastic oscillator, theory and experiments.* Proceedings of the design engineering technical conferences, Vol. 3, pp. 299-3003, September 17-20, Boston, Massachusetts.
- Van Oudheusden, B. W. (1996). *Galloping behaviour of an aeroelastic oscillator with two degrees of freedom.* report LR-811, Faculty of Aerospace Engineering, Delft University of Technology, The Netherlands.
- Verhulst, F. (1996). *Nonlinear differential equations and dynamical systems* (2nd edition). Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.