SAINS Volume 15, Nomor 1/ Januari 2015 : 22 – 24

KARAKTERISTIK RELASI EKUIVALENSI PADA SEMIGRUP

Titik Suparwati
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Cenderawasih, Jayapura

ABSTRACT

This research discuss about characters of congruence on Semigroup. It has a strong relationship with a particular relatio on Semigroup called equivalence relation.

Suppose $(G,*)$ is a Semigroup and ρ is an equivalence relation on G. Relation ρ is called congruence on G if it satisfied these compatible properties as follow : $(\forall a,s,t \in G).s\ \rho\ t \Rightarrow (as\ \rho\ at$ dan $sa\ \rho\ ta\ )$

Keywords : Semigroup, equivalence relation, congruence

PENDAHULUAN

Misalkan G adalah suatu himpunan tak kosong $(G \neq \emptyset)$ yang dilengkapi dengan operasi biner $*$. G dikatakan semigrup terhadap operasi biner $*$ jika $(G,*)$ memenuhi sifat assosiatif, yaitu : $(x*y)*z = x*(y*z)$ untuk setiap $x,y,z \in G$ (Howie,1976).

Pada semigrup $(G,*)$, jika terdapat suatu relasi ekuivalensi ρ pada himpunan G yang memenuhi sifat kompatibel, yaitu :

i. Kompatibel kiri, yaitu $s\ \rho\ t \Rightarrow as\ \rho\ at$ untuk setiap $a,s,t \in G$
ii. Kompatibel kanan, yaitu $s\ \rho\ t \Rightarrow sa\ \rho\ ta$ untuk setiap $a,s,t \in G$

maka ρ disebut relasi kongruen pada semigrup $(G,*)$.

Dapat ditunjukkan bahwa relasi kongruen pada semigrup $(G,*)$ merupakan suatu relasi ekuivalensi, sehingga G terpartisi atas kelas-kelas ekuivalensi yang saling asing. Selanjutnya himpunan $x\rho = \{y \in G | (x,y) \in \rho\}$ merupakan kelas ekuivalensi yang diwakili oleh x. Himpunan inilah yang disebut himpunan kuosen dari G, dan dinotasikan dengan $G/_{\rho}$.

Berdasarkan uraian tersebut maka akan diuraikan sifat-sifat yang terdapat pada kekongruenan semigrup.

*Alamat Korespondensi:
Jurusan Fisika, Kampus UNCEN-WAENA,
Jl. Kamp. Wolker, Jayapura Papua. 99358
e-mail: ti2k_parwati@yahoo.com

METODE PENELITIAN

Metode dalam penelitian ini adalah tinjauan kepustakaan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut akan dijelaskan beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan semigrup, relasi ekuivalensi dan kongruen.

Definisi 1. (Howie, 1976)
Misalkan G adalah suatu himpunan tak kosong $(G \neq \emptyset)$ yang dilengkapi dengan operasi biner $*$. G dikatakan semigrup terhadap operasi biner $*$ jika $(G,*)$ memenuhi sifat assosiatif, yaitu : $(\forall x,y,z \in G).[(x*y)*z = x*(y*z)]$
Berdasarkan definisi di atas $(G,*)$ dikatakan semigrup jika memenuhi syarat-syarat sebagai berikut :

i. $(\forall x,y \in G).x*y \in G$
ii. $(\forall x,y,z \in G).[(x*y)*z = x*(y*z)]$

Definisi 2. (Spitnagel,1997)
Misalkan $(G,*)$ dan $(G',*')$ masing-masing adalah semigrup.

1. Suatu pemetaan $\varphi: G \to G'$ disebut homomorphisma jika

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) *' \varphi(y)$$

2. Jika φ merupakan homomorphisma surjektif maka φ disebut epimorphisma.
3. Jika φ merupakan homomorphisma injektif maka φ disebut monomorphisma.
4. Jika φ merupakan homomorphisma yang surjektif dan injektif maka φ disebut isomorphisma.

Definisi 3. (Fraleigh, 2000)

Suatu relasi ρ pada G dikatakan relasi ekuivalensi jika dan hanya jika :

i. ρ bersifat refleksif, yaitu
$$(\forall a \in G).\, a\, \rho\, a$$
ii. ρ bersifat symetris, yaitu
$$(\forall a \in G).\, a\, \rho\, b \Rightarrow b\, \rho\, a$$
iii. ρ bersifat transitif, yaitu
$$(\forall a \in G).\, a\rho b \& b\rho c \Rightarrow a\rho c$$

Definisi 4. (Howie,1976)

Misalkan $(G,*)$ suatu semigrup. Suatu relasi ekuivalensi ρ pada himpunan G disebut kompatibel jika dan hanya jika kompatibel kiri dan kompatibel kanan, yaitu :

i. Kompatibel kiri, yaitu $s\, \rho\, t \Rightarrow as\, \rho\, at$ untuk setiap $a, s, t \in G$
ii. Kompatibel kanan, yaitu $s\, \rho\, t \Rightarrow sa\, \rho\, ta$ untuk setiap $a, s, t \in G$

Akibat dari definisi di atas dapat dikatakan bahwa :

- Suatu relasi ekuivalensi yang kompatibel kiri disebut kongruen kiri.
- Suatu relasi ekuivalensi yang kompatibel kanan disebut kongruen kanan.
- Suatu relasi ekuivalensi yang kompatibel disebut kongruen.

Selanjutnya dapat disusun suatu teorema kongruen sebagai berikut :

Teorema 1. (Howie, 1976)

Suatu relasi ρ pada semigrup $(G,*)$ dikatakan kongruen jika dan hanya jika kongruen kiri dan kongruen kanan.

Berikut akan diuraikan tentang sifat-sifat relasi ekuivalensi pada semigrup.

Teorema 2. (Spitznagel, 1997)

Misalkan $(G,*)$ dan $(G',*')$ masing-masing adalah semigrup. Jika $\varphi: G \to G'$ homomorphisma maka $\varphi \circ \varphi^{-1}$ adalah kongruen pada G.

Bukti :

Langkah pertama adalah mendefinisikan $\varphi \circ \varphi^{-1}$ sebagai ker φ, sehingga

$$\varphi \circ \varphi^{-1}$$
$$= \{(x, y) \in GxG | (\exists z \in G').\, (x, z) \in \varphi \; dan \; (z, y) \in \varphi^{-1}\}$$
$$= \{(x, y) \in GxG | (\exists z \in G').\, (x, z) \in \varphi \; dan \; (y, z) \in \varphi\}$$
$$= \{(x, y) \in GxG | x\varphi = y\varphi\}$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\varphi \circ \varphi^{-1}$ adalah relasi kongruen pada G

i. Diambil sebarang $x \in G$. Karena $x\varphi = x\varphi$, maka $(x, x) \in \varphi \circ \varphi^{-1}$.
Terbukti bahwa $\varphi \circ \varphi^{-1}$ refleksif.

ii. Diambil $x, y \in G$ dengan $(x, y) \in \varphi \circ \varphi^{-1}$.
Dari $(x, y) \in \varphi \circ \varphi^{-1}$ diperoleh $x\varphi = y\varphi \Leftrightarrow y\varphi = x\varphi \Leftrightarrow (y, x) \in \varphi \circ \varphi^{-1}$.
Terbukti bahwa $\varphi \circ \varphi^{-1}$ symetris.

iii. Diambil $x, y, z \in G$ dengan $(x, y), (y, z) \in \varphi \circ \varphi^{-1}$.
Dari $(x, y) \in \varphi \circ \varphi^{-1}$ diperoleh $x\varphi = y\varphi$ dan dari $(y, z) \in \varphi \circ \varphi^{-1}$ diperoleh $y\varphi = z\varphi$. Akibatnya diperolaeh $x\varphi = y\varphi = z\varphi$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $x\varphi = z\varphi \Leftrightarrow (x, z) \in \varphi \circ \varphi^{-1}$.
Terbukti bahwa $\varphi \circ \varphi^{-1}$ transitif.

iv. Diambil sebarang $x, y, z, t \in G$ dengan $(x, y), (z, t) \in \varphi \circ \varphi^{-1}$
Dari $(x, y) \in \varphi \circ \varphi^{-1}$ diperoleh $x\varphi = y\varphi$ dan dari $(z, t) \in \varphi \circ \varphi^{-1}$ diperoleh $z\varphi = t\varphi$. Karena φ homomorphisma maka
$$(xz)\varphi = (x\varphi)(z\varphi) = (y\varphi)(t\varphi) = (yt)\varphi$$

Dengan kata lain $(xz, yt) \in \varphi \circ \varphi^{-1}$. Terbukti bahwa $\varphi \circ \varphi^{-1}$ kompatibel.

Dari a,b,c dan d dapat disimpulkan bahwa $\varphi \circ \varphi^{-1}$ kongruen pada G.

Misalkan ρ adalah relasi kongruen pada semigrup G, maka akan terbentuk himpunan kelas-kelas ekuivalensi G/ρ . Selanjutnya didefinisikan suatu operasi biner $*$ pada G/ρ dengan aturan sebagai berikut:

$$(a\rho) * (b\rho) = (ab)$$
$$\text{untuk setiap } a\rho, b\rho \in G/\rho$$

Akibatnya diperoleh teorema berikut :

Teorema 3 (Howie, 1976)

i. Jika ρ adalah relasi kongruen pada semigrup G, maka G/ρ merupakan semigrup dengan operasi biner $*$ yang didefinisikan dengan aturan :
$$(a\rho) * (b\rho) = (ab)\rho, \quad \text{untuk setiap } a\rho, b\rho \in G/\rho$$
ii. Pemetaan $\rho': G \to G/\rho$ merupakan homomorphisma jika didefinisikan bahwa
$$\rho'(a) = a\rho \;, \; \text{untuk setiap} a \in G$$

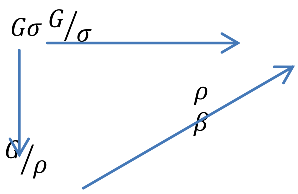
iii. Misalkan G dan G' masing-masing adalah semigrup, dan $\varphi: G \to G'$ homomorphisma maka $Ker\ \varphi = \varphi \circ \varphi^{-1}$ adalah kongruen pada G dan terdapat monomorphisma $\alpha: {}^{G}/_{\rho} \to G'$

Teorema 4. (Spitznagel, 2000)

Jika ρ dan σ adalah relasi kongruen pada semigrup G dan $\rho \leq \sigma$ maka terdapat suatu homomorphisma $\beta: {}^{G}/_{\rho} \to {}^{G}/_{\sigma}$.

Bukti :

Teorema di atas dapat diilustrasikan dalam bentuk diagram sebagai berikut :



i. Didefinisikan $\beta: {}^{G}/_{\rho} \to {}^{G}/_{\sigma}$ sebagai $\beta(a\rho) = a\sigma$, $(\forall a \in G)(\forall a\rho \in {}^{G}/_{\rho})$

Akan dibuktikan β weldefined

Diambil sebarang $a\rho, b\rho \in {}^{G}/_{\rho}$ dengan $a\rho = b\rho$

Dari $a\rho = b\rho$ diperoleh bahwa $(a, b) \in \rho$. Karena $\rho \leq \sigma$ akibatnya $(a, b) \in \sigma$.

Hal ini berarti bahwa

$\beta(a\rho) = \beta\,(b\rho)$.

Jadi β weldefined.

ii. Akan dibuktikan bahwa β adalah homomorphisma

Diambil sebarang $a\rho, b\rho \in {}^{G}/_{\rho}$. Dengan menggunakan hasil dari i di atas dan berdasarkan Teorema 2, maka diperoleh :

$$\begin{aligned} \beta\big((ab)\rho\big) &= (a\rho)\sigma \\ &= (a\sigma) * (b\sigma) \\ &= \beta(a\rho) * \beta(b\sigma) \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\beta: {}^{G}/_{\rho} \to {}^{G}/_{\sigma}$ homomorphisma

Teorema 5. (Spitznagel, 2000)

Misalkan ρ dan σ adalah relasi kongruen pada semigrup G dan $\rho \leq \sigma$. Jika didefinisikan bahwa ${}^{\sigma}/_{\rho}$ adalah suatu relasi pada ${}^{G}/_{\rho}$ dengan aturan

$a\rho\ {}^{\sigma}/_{\rho}\ b\rho \Leftrightarrow a\sigma = b\sigma$

maka relasi ${}^{\sigma}/_{\rho}$ merupakan relasi kongruen pada ${}^{G}/_{\rho}$ dan $((G / \rho)) / ((\sigma / \rho)) \cong G / (\sigma)$

Teorema 6.(Howie, 1976)

Jika ρ_i , $i \in I$ adalah relasi kongruen pada semigrup G, maka $\cap\,(\rho_i\ ,\ i \in I)$ juga merupakan relasi kongruen pada G.

KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan di atas dapat diperoleh kesimpulan tentang sifat-sifat relasi ekuivalensi pada semigrup sebagai berikut :

1. Suatu relasi ekuivalensi ρ pada semigrup $(G,*)$ dikatakan kongruen jika dan hanya jika kongruen kiri dan kongruen kanan.
2. Kongruen pada semigrup mempunyai peranan yang sama dengan sugrup normal dalam teori grup atau ideal dalam teori ring.

Irisan (*intersection*) dari kongruen-kongruen pada semigrup G juga merupakan kongruen pada semigrup G .

DAFTAR PUSTAKA

Fraleigh. J.B., 2000. *A first Course in Abstract Algebra*. Pearson Education Asia Pte Ltd.

Howie. J.M., 1976. *An Introduction to Semigroup Theory*. Academic Press London.

Spitznagel.C.R., 1997. *Structure in Semigroup II*. Seminar Notes

Spitznagel.C.R., 2000. *Congruence Lattices.* http://www.jcu.edu/math.pdf